סדרות

מצגת הסבר – סדרה חשבונית וסדרה הנדסית

מתמטיקה 4 יח״ל | שאלון 35471 | תכנית חדשה

האתר נבנה ע״י עדי והבינה

מה נלמד?

שאלות הסדרות בשאלון הן כמעט תמיד **שאלות מילוליות**: תשלומים, אימונים, מרחקים.

1. לזהות: סדרה **חשבונית** או **הנדסית**?
2. למצוא איבר: a_n
3. למצוא את **מקום** האיבר: n
4. לחשב **סכום**: S_n
5. לבנות ולפתור **משוואה** עם a_1, d או q

המילים בשאלה מגלות את הסוג

„גדול **ב־**50 מהקודם" ← מוסיפים מספר קבוע ← **חשבונית**

„גדול **פי** 1.02 מהקודם" ← כופלים במספר קבוע ← **הנדסית**

שני סוגי סדרות

סדרה חשבונית

כל איבר = הקודם **ועוד** מספר קבוע d (ההפרש).

$$5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \ldots$$

$d = 8 - 5 = 3$

$d > 0$ ← הסדרה עולה. $d < 0$ ← יורדת.

סדרה הנדסית

כל איבר = הקודם **כפול** מספר קבוע q (המנה).

$$2,\ 6,\ 18,\ 54,\ \ldots$$

$q = 6 : 2 = 3$

עלייה של 2% בכל פעם ← $q = 1.02$

כלל נסיגה מגדיר כל איבר לפי הקודם לו. למשל $a_{n+1} - a_n = -2$ ← ההפרש קבוע ← סדרה חשבונית עם $d = -2$.

הנוסחאות מהנוסחאון

נוסחאון • סדרות

	סדרה חשבונית	סדרה הנדסית
כלל נסיגה	$a_1 = a,\ \ a_{n+1} = a_n + d$	$a_1 = a,\ \ a_{n+1} = a_n \cdot q$
איבר n-י	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
סכום	$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ $S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$	$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1},\ \ q \neq 1$
סדרה אין־סופית שסכומה מתכנס	-	$S = \frac{a_1}{1 - q}$

לזכור (לא בנוסחאון): סדרה הנדסית אין־סופית מתכנסת כאשר $-1 < q < 1$ $(q \neq 0)$.

שיטת הפתרון – שלב אחרי שלב

1. מזהים את **סוג** הסדרה (ב־ או פי).
2. רושמים מה נתון: a_1, d או q, ומה מבקשים.
3. בוחרים נוסחה: איבר a_n ← סה"כ S_n ←.
4. מציבים. כשחסר נתון – בונים **משוואה** (או שתיים).
5. בודקים שהתשובה הגיונית: n חייב להיות **מספר טבעי**.

„מצאו את n"

נועם שוחה. נתון:

$$a_1 = 350,\quad d = 50$$

באיזה אימון שחה 830 מטר?

$$350 + 50(n-1) = 830$$

$$50(n-1) = 480 \;\Rightarrow\; n = 10.6$$

n אינו טבעי ← **אין** אימון כזה.

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד ב' • שאלה 1

שאלת בגרות פתורה – הצעה ראשונה (א)

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 1

מחיר אופנוע 43,650 שקלים. **הצעה ראשונה:** כל תשלום גבוה מקודמו במספר שקלים קבוע. ההפרש בין התשלום השישי לשני הוא 200 שקלים, והתשלום התשיעי גבוה פי 1.2 מהראשון. **א.** מצאו את התשלום הראשון.

„גבוה **ב**מספר קבוע" ← סדרה חשבונית.

$$a_6 - a_2 = (a_1 + 5d) - (a_1 + d)$$

$$4d = 200$$

$$d = 50$$

התשלום התשיעי גבוה פי 1.2 מהראשון:

$$a_1 + 8d = 1.2a_1$$

$$8 \cdot 50 = 0.2a_1 \;\Rightarrow\; a_1 = 2000$$

התשלום הראשון: 2,000 ש"ח

שאלת בגרות פתורה – מספר התשלומים (ב)

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 1

ב. מצאו את מספר התשלומים לפי ההצעה הראשונה.

סכום כל התשלומים = מחיר האופנוע:

$$S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2} = 43{,}650$$

$$\frac{n[2 \cdot 2000 + 50(n-1)]}{2} = 43{,}650$$

$$n(4000 + 50n - 50) = 87{,}300$$

$$50n^2 + 3950n - 87{,}300 = 0 \quad / : 50$$

$$n^2 + 79n - 1746 = 0$$

$$n = \frac{-79 \pm \sqrt{79^2 + 4 \cdot 1746}}{2} = \frac{-79 \pm 115}{2}$$

$n = 18$ או $n = -97$.

מספר תשלומים הוא מספר טבעי ← נפסל -97.

18 תשלומים

שאלת בגרות פתורה – השוואת ההצעות (ג)

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 1

הצעה שנייה: 18 תשלומים שווים. **ג.** כמה מהתשלומים בהצעה הראשונה נמוכים מהתשלום הקבוע בהצעה השנייה?

התשלום הקבוע:

$$43{,}650 : 18 = 2425$$

מחפשים את האיברים הקטנים מ־2,425:

$$2000 + 50(n-1) < 2425$$

$$50(n-1) < 425 \;\Rightarrow\; n < 9.5$$

בדיקה

$$a_9 = 2000 + 8 \cdot 50 = 2400$$

$$a_{10} = 2450$$

התשלומים 1 עד 9 קטנים מ־2,425.

9 תשלומים

שאלת בגרות פתורה – סדרה הנדסית (א, ב)

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 1

בדקה הראשונה יוסי רץ 75 מטרים. בכל דקה, החל מהשנייה, הוא רץ מרחק הגדול **פי** 1.02 מהמרחק בדקה הקודמת.

„פי 1.02" ← סדרה הנדסית:

$$a_1 = 75,\quad q = 1.02$$

א1 המרחק בדקה הרביעית:

$$a_4 = 75 \cdot 1.02^{3} \approx 79.59$$

א2 המרחק הכולל ב־4 הדקות הראשונות:

$$S_4 = \frac{75(1.02^{4}-1)}{1.02-1} \approx 309.12$$

ב נוסחה למרחק הכולל ב־n דקות:

$$S_n = \frac{75(1.02^{n}-1)}{0.02} = 3750(1.02^{n}-1)$$

דייקו שתי ספרות אחרי הנקודה, כמו שמבקשים בשאלה.

שאלת בגרות פתורה – סדרה הנדסית (ג, ד)

בגרות חורף תשפ"ג (2023) • שאלה 1

ג יוסי רוצה לרוץ 2,500 מטרים, ויש לו 25 דקות בלבד. הסבירו מדוע לא יצליח.

$$S_{25} = 3750(1.02^{25} - 1) \approx 2402.27$$

2,402.27 מטרים פחות מ־2,500 ← הוא **לא** יצליח.

ד דני רץ באותו מסלול, גם אצלו $q = 1.02$. מהו המרחק הקצר ביותר בדקה הראשונה כדי לעבור 2,500 מטרים ב־25 דקות?

$$\frac{a_1(1.02^{25} - 1)}{0.02} \geq 2500$$

$$a_1 \geq \frac{2500 \cdot 0.02}{1.02^{25} - 1} = \frac{50}{0.640606} \approx 78.05$$

כ־78.05 מטרים

כלל נסיגה – דוגמה מהבגרות

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 1

בסדרה: $a_1 = 84$ ולכל n: $a_{n+1} - a_n = -2$.

1. ההפרש בין כל שני איברים סמוכים קבוע ← **חשבונית**, $d = -2$.
2. האיבר הכללי:
$$a_n = 84 + (n-1)\cdot(-2) = 86 - 2n$$
3. כמה איברים חיוביים?
$$86 - 2n > 0 \;\Rightarrow\; n < 43$$

האיברים a_1 עד a_{42} חיוביים ($a_{42} = 2$).

$a_{43} = 0$ – **לא** חיובי ולא שלילי.

האיבר השלילי הראשון:

$$a_{44} = 86 - 88 = -2$$

42 איברים חיוביים

שימו לב – הטעויות הנפוצות

1. „ב־" ← חשבונית (d). „פי" או „באחוזים" ← הנדסית (q).
2. עלייה של $p\%$ ← $q = 1 + \frac{p}{100}$, לא $q = p$.
3. באיבר ה־n החזקה היא $n-1$, לא n.
4. n הוא מספר טבעי – פוסלים פתרון שלילי או שבר, ומסבירים במילים.
5. „סך הכול" / „כולל" ← **סכום** S_n, לא a_n.
6. כשהסדרה משתנה באמצע – מחשבים **בשני חלקים** ומחברים.

בדיקה עצמית

1. בסדרה חשבונית $a_1 = 5,\ d = 3$. מצאו את a_{20} ואת S_{20}.
2. באותה סדרה: איזה מקום תופס האיבר 95?
3. בסדרה הנדסית $a_1 = 2,\ q = 3$. מצאו את a_5 ואת S_5.
4. סדרה הנדסית אין־סופית: $a_1 = 12,\ q = 0.25$. מהו סכומה?

התשובות (לפתוח אחרי שפתרתם)

1. $a_{20} = 5 + 19 \cdot 3 = \mathbf{62}$
   $S_{20} = \dfrac{20(5 + 62)}{2} = \mathbf{670}$
2. $5 + 3(n-1) = 95 \ \Rightarrow \ n = \mathbf{31}$
3. $a_5 = 2 \cdot 3^4 = \mathbf{162}$
   $S_5 = \dfrac{2(3^5 - 1)}{3 - 1} = \mathbf{242}$
4. $S = \dfrac{12}{1 - 0.25} = \mathbf{16}$