גאומטרייה וטריגונומטריה

מצגת הסבר – משפטי מעגל, דמיון וחישובים במערכת צירים

מתמטיקה 4 יח״ל | שאלון 35471 | תכנית חדשה

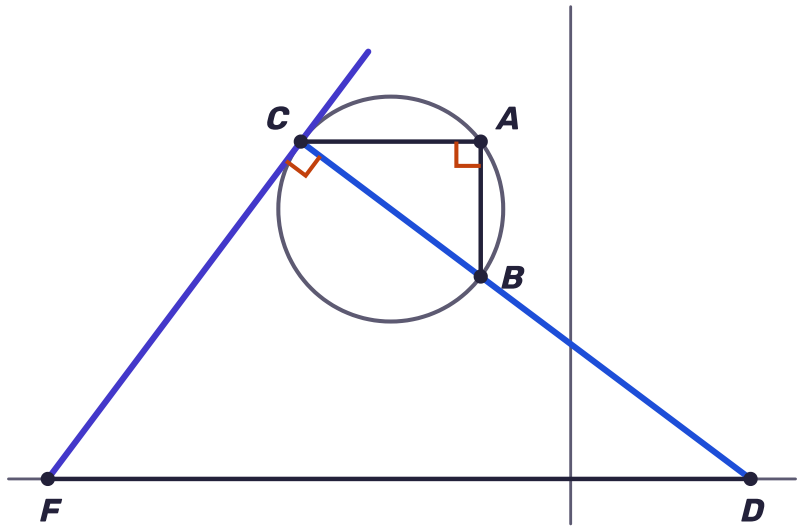
האתר נבנה ע״י עדי והבינה

מה נלמד?

בשאלות האלה (שאלה 4 או 5) מעגל ומשולשים יושבים **במערכת צירים**:

1. **מוכיחים** בעזרת משפטים: זווית ישרה, דמיון משולשים
2. **מחשבים** בכלים של גאומטרייה אנליטית: שיפוע, חיתוך, מרחק
3. משלימים בעזרת **טריגונומטריה**: זווית, שטח

ההוכחה בסעיף הראשון היא בדרך כלל המפתח לסעיפים הבאים.



מתוך בגרות קיץ תשפ"ו מועד א'

משפטי מעגל – לזכור (לא בנוסחאון)

זווית היקפית על קוטר

זווית היקפית הנשענת על קוטר היא **ישרה** (90°).

ולהפך: זווית היקפית ישרה נשענת על **קוטר**.

אותה קשת

זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת – **שוות**.

מרובע חסום במעגל

סכום זוויות נגדיות הוא 180°.

משיק

המשיק **מאונך לרדיוס** בנקודת ההשקה.

דמיון משולשים – לזכור (לא בנוסחאון)

איך מוכיחים דמיון?

ז.ז. – שתי זוויות שוות.

זוויות שוות מוצאים כך:

- זוויות **מתחלפות** בין ישרים מקבילים
- זוויות **קודקודיות**
- שתי זוויות ישרות
- זווית **משותפת** לשני המשולשים

יחס הדמיון k

מה משווים	היחס
צלעות מתאימות	k
היקפים	k
שטחים	k^2

צלעות מתאימות – מול זוויות שוות.

הנוסחאות מהנוסחאון

נוסחאון • משולש ישר זווית

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\quad \cos\alpha = \frac{b}{c},\quad \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

a – הניצב מול הזווית

b – הניצב שליד הזווית

c – היתר

משפט פיתגורס:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

נוסחאון • צורות במישור

שטח משולש (הזווית כלואה בין שתי הצלעות):

$$S = \frac{1}{2}\cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$$

משפט הסינוסים (R – רדיוס המעגל החוסם):

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

ובנוסף כל נוסחאות הגאומטרייה האנליטית: שיפוע, משוואת ישר, אמצע קטע, מרחק, ישרים מאונכים ומשוואת מעגל.

שיטת הפתרון – הוכחה ואז חישוב

1. מסמנים על הסרטוט את כל הנתונים (קוטר, משיק, מקבילים).
2. הוכחה: כל שורה – **טענה + נימוק** (שם המשפט).
3. זווית ישרה במעגל? ← מאונכים ← $m_1 \cdot m_2 = -1$.
4. חישובים: שיפוע ← ישר ← חיתוך ← מרחק.
5. בסוף: יחס דמיון, זווית בעזרת טריגונומטריה, שטח.

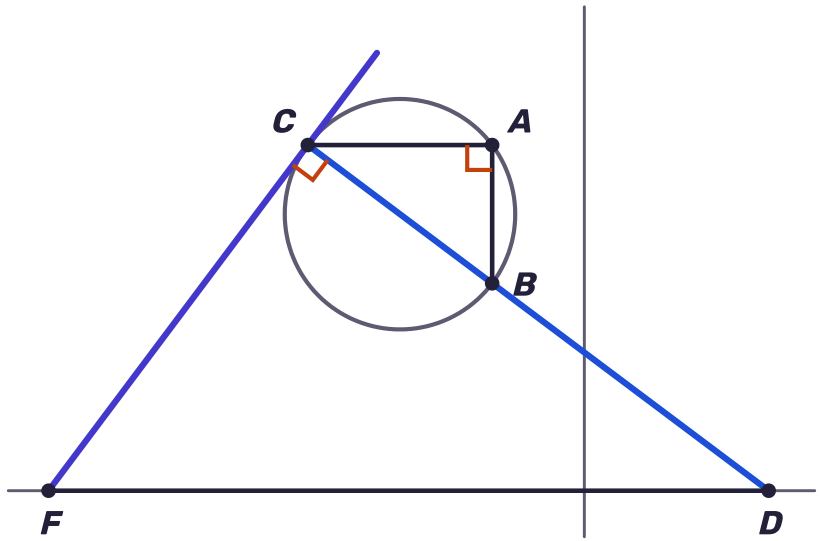
דוגמה לשורת הוכחה

טענה	נימוק
$\angle CAB = 90^\circ$	זווית היקפית הנשענת על קוטר
$\angle FCD = 90^\circ$	משיק מאונך לרדיוס
$\triangle ABC \sim \triangle CFD$	ז.ז.

שאלת בגרות פתורה – ההוכחה (א)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 5

CB קוטר במעגל. AB מקביל לציר ה־y. המשיק למעגל בנקודה C חותך את ציר ה־x ב־F, והמשך הקוטר חותך את ציר ה־x ב־D.



א1 $\angle CAB = 90^\circ$ – זווית היקפית על קוטר.

הישר AB אנכי, ולכן AC מקביל לציר ה־x.

א2 הוכיחו: $\triangle ABC \sim \triangle CFD$

1. $\angle CAB = \angle FCD = 90^\circ$ – זווית היקפית על קוטר, ומשיק מאונך לרדיוס.

2. $\angle ACB = \angle CDF$ – זוויות מתחלפות (AC מקביל לציר ה־x).

לכן המשולשים דומים (ז.ז.).

שאלת בגרות פתורה – חישובים (ב, ג)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 5

משוואת המשיק: $y=\frac{4}{3}x+31$. נתון $D(8,0)$.

ב F על ציר ה־x – נציב $y=0$:

$$\frac{4}{3}x+31=0 \;\Rightarrow\; x=-23.25$$

$$FD=8-(-23.25)=31.25$$

ג1 $CD\perp CF$, ושיפוע CF הוא $\frac{4}{3}$:

$$m_{CD}=-\frac{3}{4},\quad y=-\frac{3}{4}(x-8)=-\frac{3}{4}x+6$$

ג2 C – חיתוך המשיק עם CD:

$$\frac{4}{3}x+31=-\frac{3}{4}x+6 \;\Rightarrow\; x=-12$$

$$C(-12,15),\quad CD=\sqrt{20^2+15^2}=25$$

שאלת בגרות פתורה – היקף בעזרת הדמיון (ד)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 5

יחס הדמיון בין המשולשים ABC ו־CFD הוא $\frac{8}{25}$. מצאו את היקף המשולש ABC.

קודם – ההיקף של CFD:

$$CF = \sqrt{11.25^2 + 15^2} = 18.75$$

$$P_{CFD} = 18.75 + 31.25 + 25 = 75$$

יחס ההיקפים = k

$$\frac{P_{ABC}}{P_{CFD}} = \frac{8}{25}$$

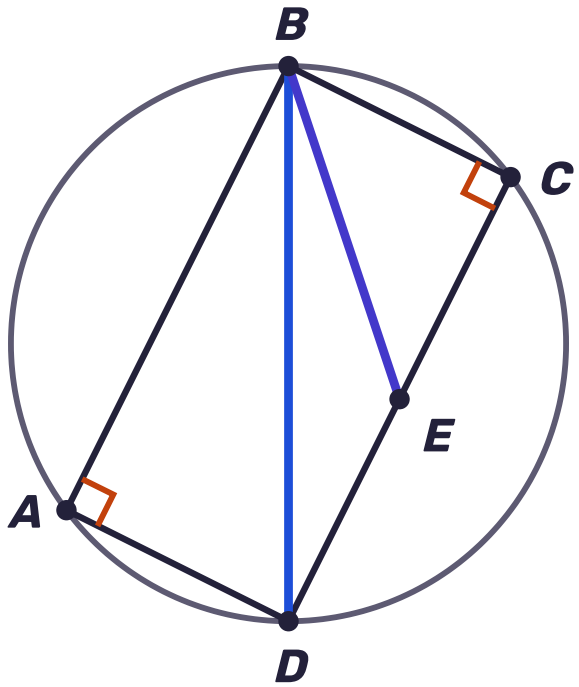
$$P_{ABC} = \frac{8}{25} \cdot 75 = 24$$

היקף ABC: 24

עוד שאלת בגרות – מרובע חסום (א, ב, ג)

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 4

המרובע $ABCD$ חסום במעגל, ו־$\angle A = \angle C$. הקודקודים $B(0,12)$ ו־$D(0,2)$ על ציר ה־y.



א זוויות נגדיות במרובע חסום:

$$\angle A + \angle C = 180^\circ \;\Rightarrow\; \angle A = \angle C = 90^\circ$$

זווית היקפית ישרה נשענת על קוטר ← BD **קוטר**.

ב המרכז = אמצע BD, הרדיוס = חצי BD:

$$M(0,7),\ R=5 \;\Rightarrow\; x^2 + (y-7)^2 = 25$$

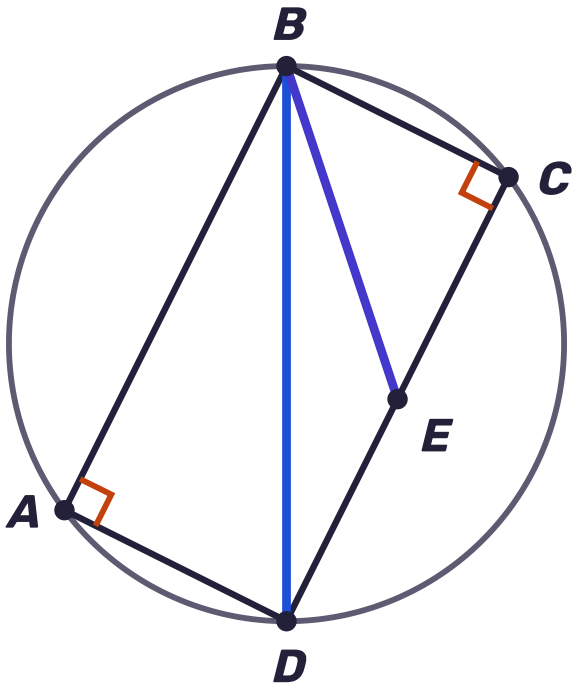
ג שיפוע BC הוא $-\frac{1}{2}$, ו־$DC \perp BC$:

$$DC:\ y = 2x + 2 \qquad BC:\ y = -\frac{1}{2}x + 12$$

$$2x + 2 = -\frac{1}{2}x + 12 \;\Rightarrow\; C(4,10)$$

עוד שאלת בגרות – שטח וזוויות (ד, ה)

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 4



ד E אמצע DC, כלומר $E(2,6)$. המשולש BCE ישר זווית ב־C:

$$BC=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20},\quad CE=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$$

$$S_{BCE}=\frac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{20}}{2}=10$$

ה1 הניצבים שווים ← משולש ישר זווית ושווה שוקיים:

$$\angle BEC=\frac{180^\circ-90^\circ}{2}=45^\circ$$

ה2 אנך מ־E לציר ה־y: הניצב מול הזווית 2, הניצב שליד 6:

$$\tan\angle DBE=\frac{2}{6}\ \Rightarrow\ \angle DBE\approx 18.43^\circ$$

שימו לב – הטעויות הנפוצות

1. בכל שורת הוכחה – **נימוק** (שם המשפט), לא רק טענה.
2. בדמיון – לכתוב את הקודקודים **בסדר המתאים**.
3. יחס ההיקפים הוא k.
   יחס השטחים הוא k^2.
4. זווית ישרה במעגל ← לחפש **קוטר** (וגם הפוך).
5. במשולש ישר זווית: לזהות מי **מול** הזווית ומי **ליד**.
6. מחשבון במעלות (DEG)!

בדיקה עצמית

1. AB קוטר במעגל ו־C נקודה על המעגל. מהי הזווית ACB? מדוע?
2. במרובע חסום במעגל זווית אחת היא 70°. מהי הזווית שמולה?
3. שני משולשים דומים, יחס הדמיון 1.5. מהו יחס השטחים?
4. במשולש שתי צלעות 6 ו־8, והזווית ביניהן 30°. מהו שטחו?

התשובות (לפתוח אחרי שפתרתם)

1. 90° – זווית היקפית הנשענת על קוטר
2. $180^\circ - 70^\circ = \mathbf{110^\circ}$
3. $1.5^2 = \mathbf{2.25}$
4. $S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin 30^\circ = \mathbf{12}$