בעיות קיצון

מצגת הסבר – מתי הכי גדול ומתי הכי קטן

מתמטיקה 4 יח״ל | שאלון 35471 | תכנית חדשה

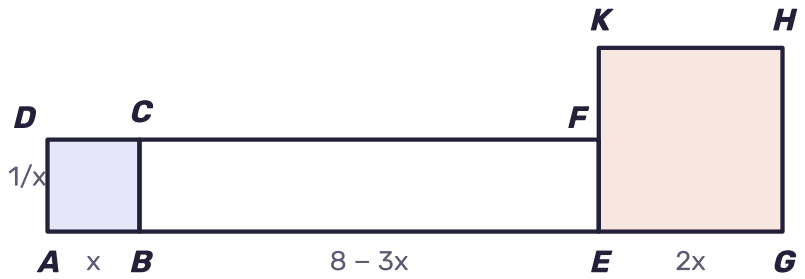
האתר נבנה ע״י עדי והבינה

מה נלמד?

בבחינה זו בדרך כלל **שאלה 8**. שני סוגים:

1. **בעיה גאומטרית**: מלבנים, ריבועים, היקף ושטח
2. **נקודה על גרף**: משולש או מלבן שקודקוד שלו על גרף פונקציה

בשני המקרים: מבטאים את הגודל המבוקש **בעזרת משתנה אחד**, וגוזרים.



מתוך בגרות קיץ תשפ"ו מועד ב'

רעיונות מרכזיים

פונקציה של משתנה אחד

כל אורך בסרטוט כותבים בעזרת משתנה אחד.

משתמשים בנתונים: אורך כולל, שטח נתון, נקודה על גרף.

תחום המשתנה

אורכים חיוביים, למשל:

$$0 < x < \frac{8}{3}$$

נקודה על הענף הימני ברביע הראשון, למשל: $t > 4$

קיצון

$S'(x) = 0$, ואז **טבלת סימנים** מראה אם זה מינימום או מקסימום.

מה שואלים?

„בעבור איזה x״ ← התשובה היא x.

„מהו השטח המינימלי״ ← מציבים בחזרה.

הנוסחאות מהנוסחאון

נוסחאון • נגזרות

$$(x^t)' = t \cdot x^{t-1}$$

$$\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

נוסחאון • נגזרת של מנה

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ושטחי צורות: משולש, מלבן ($a \cdot b$), טרפז, עיגול.

שטח משולש ישר זווית = מכפלת הניצבים חלקי 2.

שיטת הפתרון – שלב אחרי שלב

1. מסמנים את המשתנה (x או t) וכותבים את **התחום** שלו.
2. מבטאים בעזרתו את **כל** האורכים הדרושים.
3. בונים את **פונקציית המטרה**: $S(x)$, $P(t)$ ...
4. גוזרים ומשווים לאפס. פוסלים פתרון מחוץ לתחום.
5. **טבלת סימנים** ← מינימום או מקסימום.
6. עונים בדיוק על מה ששאלו.

טבלת סימנים

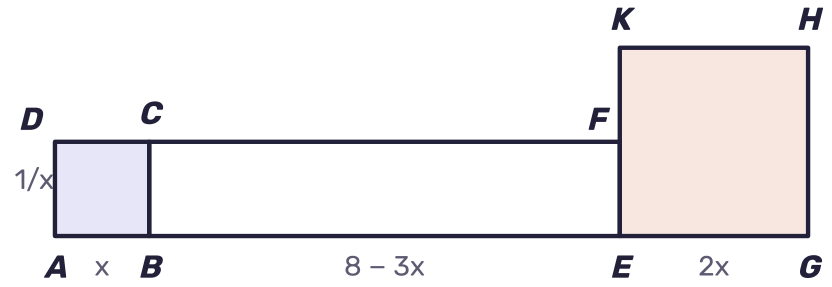
x	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
S'	−	0	+
S	↘	min	↗

יורדת ואז עולה ← **מינימום**.

שאלת בגרות פתורה – בונים את הפונקציה (א, ב)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 8

מתחם: מבואה (מלבן $ABCD$), שביל (מלבן $BEFC$) וגן פסלים (ריבוע $EGHK$).
אורך הקטע AG הוא 8 מטרים.
הצלע EG גדולה פי 2 מהצלע AB.
נסמן $AB = x$. שטח המבואה 1 מ"ר.



א

$$x + BE + 2x = 8 \Rightarrow BE = 8 - 3x$$

ב1

$$x \cdot AD = 1 \Rightarrow AD = \frac{1}{x}$$

ב2 השטח הכולל = מבואה + שביל + ריבוע:

$$S(x) = 1 + (8 - 3x) \cdot \frac{1}{x} + (2x)^2$$

$$S(x) = 4x^2 + \frac{8}{x} - 2$$

שאלת בגרות פתורה – הקיצון (ג, ד)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 8

ג בעבור איזה x השטח הכולל מינימלי?

$$S'(x) = 8x - \frac{8}{x^2} = 0$$

$$8x^3 = 8 \Rightarrow x = 1$$

x	$0 < x < 1$	1	$1 < x < \frac{8}{3}$
S'	−	0	+
S	↘	min	↗

$x = 1$ **מטר**

ד האם ייתכן שהשטח הכולל הוא 9 מ"ר?

$$S(1) = 4 + 8 - 2 = 10$$

השטח המינימלי הוא 10.

9 קטן מ־10 ← **לא ייתכן.**

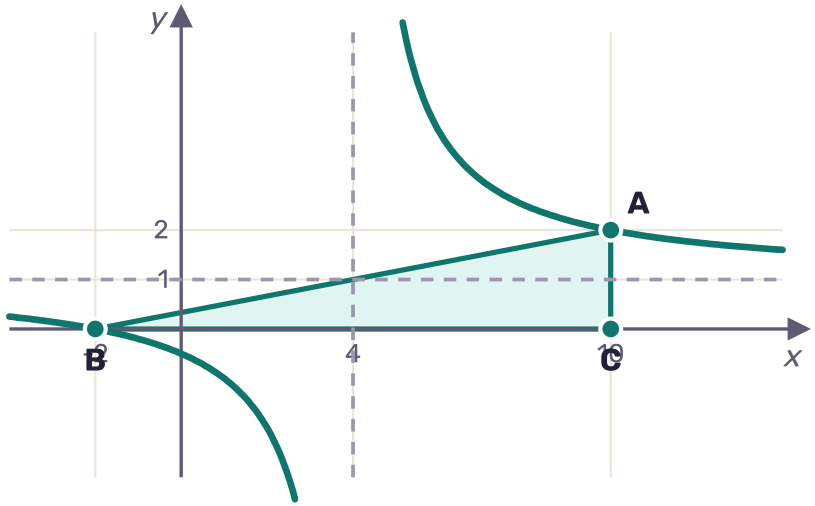
עוד שאלת בגרות – נקודה על גרף (ג)

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 8

נתונה הפונקציה:

$$f(x)=\frac{x+2}{x-4}$$

הגרף חותך את ציר ה־x בנקודה $B(-2,0)$.
הנקודה A על הענף הימני, ברביע הראשון. הנקודה C על ציר ה־x, מתחת ל־A.
מצאו את A שבעבורה שטח המשולש ABC מינימלי.



נסמן את שיעור ה־x של A ב־t (כאן $t>4$):

$$A\left(t,\ \frac{t+2}{t-4}\right)$$

$$BC=t+2,\qquad AC=\frac{t+2}{t-4}$$

$$S(t)=\frac{BC\cdot AC}{2}=\frac{(t+2)^2}{2(t-4)}$$

עוד שאלת בגרות – גזירה וטבלה (ג)

בגרות חורף תשפ"ה (2025) • שאלה 8

נגזרת של מנה:

$$S'(t)=\frac{2(t+2)\cdot 2(t-4)-(t+2)^2\cdot 2}{4(t-4)^2}=\frac{(t+2)(t-10)}{2(t-4)^2}$$

$$t_1=10,\quad t_2=-2$$

הפתרון השלילי נפסל, כי $t>4$.

t	$4<t<10$	10	$t>10$
S'	−	0	+
S	↘	min	↗

$$y_A=\frac{10+2}{10-4}=2$$

$$A(10,2)$$

והשטח המינימלי:

$$S(10)=\frac{12^2}{2\cdot 6}=12$$

בדיקה: $\frac{12\cdot 2}{2}=12$ ✓

שימו לב – הטעויות הנפוצות

1. לכתוב את **תחום** המשתנה – ולפסול פתרונות מחוצה לו.
2. לבדוק בטבלת סימנים: מינימום או מקסימום?
3. פונקציית המטרה – במשתנה **אחד** בלבד.
4. נקודה על גרף: שיעור ה־y שלה הוא $f(t)$.
5. „מהו השטח המינימלי" ← להציב את x בחזרה.
6. „האם ייתכן…" ← להשוות לערך הקיצון ולנמק.

בדיקה עצמית

1. היקף מלבן 20 ס"מ. מה אורכי צלעותיו כשהשטח מקסימלי? מהו השטח?
2. מצאו את ערך $x > 0$ שבעבורו הביטוי $x + \frac{16}{x}$ מינימלי, ואת הערך המינימלי.
3. האם הביטוי בשאלה 2 יכול להיות 7?

התשובות (לפתוח אחרי שפתרתם)

1. $S(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$
   $S'(x) = 10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5$
   הצלעות: 5 ס"מ ו־5 ס"מ (ריבוע)
   השטח: **25** סמ"ר
2. $f'(x) = 1 - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow \mathbf{x = 4}$
   $f(4) = 4 + 4 = \mathbf{8}$ (מינימום)
3. **לא** – הערך המינימלי הוא 8