חקירת פונקציות ואינטגרלים

מצגת הסבר – פונקציה רציונלית, פונקציית שורש ושטחים

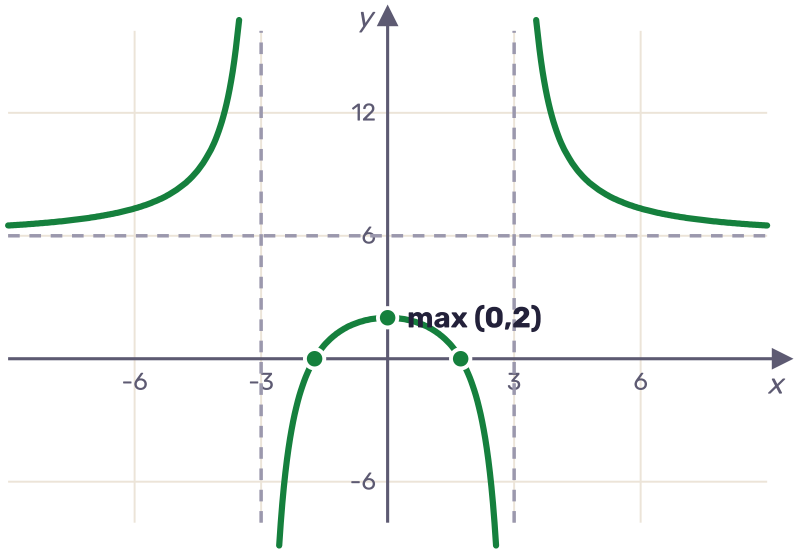
מתמטיקה 4 יח״ל | שאלון 35471 | תכנית חדשה

האתר נבנה ע״י עדי והבינה

מה נלמד?

בבחינה זו **שאלות 6–7**:

1. **פונקציה רציונלית** (שבר): תחום, אסימפטוטות, קיצון, סקיצה
2. **פונקציית שורש**: תחום, נקודות חיתוך, קיצון (גם בקצה)
3. **אינטגרל**: שטח בין גרף לציר ה־x
4. זיהוי גרף הנגזרת, הזזה של גרף



מתוך בגרות קיץ תשפ"ו מועד ב'

סדר החקירה

1. **תחום הגדרה**: המכנה שונה מאפס, הביטוי בשורש אי־שלילי.
2. **אסימפטוטות** (בפונקציה רציונלית).
3. **חיתוך עם הצירים** – עם כל ציר בנפרד.
4. **נקודות קיצון**: משווים את הנגזרת לאפס ובונים טבלת סימנים.
5. **תחומי עלייה וירידה** – מהטבלה.
6. **סקיצה** – לפי כל מה שמצאנו.

זוגית?

אם לכל x בתחום:

$$f(-x) = f(x)$$

אז הגרף סימטרי לציר ה־y.

צריך גם תחום הגדרה **סימטרי**.

הנגזרות מהנוסחאון

נוסחאון • נגזרות

$(x^t)' = t \cdot x^{t-1}$	$\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$[(f(x))^t]' = t \cdot [f(x)]^{t-1} \cdot f'(x)$	$\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$	$[\sqrt{f(x)}]' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

נגזרת של מכפלת פונקציות:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

נגזרת של מנת פונקציות:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

האינטגרלים מהנוסחאון

נוסחאון • אינטגרלים ($m \neq 0$)

$\int x^t\,dx = \dfrac{x^{t+1}}{t+1} + C$	$\int (mx+b)^t\,dx = \dfrac{(mx+b)^{t+1}}{m\cdot(t+1)} + C$
$\int \dfrac{a}{x^2}\,dx = -\dfrac{a}{x} + C$	$\int \dfrac{a}{(mx+b)^2}\,dx = -\dfrac{a}{m\cdot(mx+b)} + C$

(t ממשי, $t \neq -1$)

לזכור (לא בנוסחאון)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

שטח של חלק **מתחת** לציר ה־x – לוקחים את האינטגרל עם **מינוס**. כשהגרף חוצה את הציר – מחשבים כל חלק לחוד.

אסימפטוטות – לזכור (לא בנוסחאון)

אנכית

ערך x שמאפס את המכנה (והמונה שם $\neq 0$).

$$x^2-9=0 \;\Rightarrow\; x=\pm 3$$

אופקית (כאשר $x \to \pm\infty$)

מעלת המונה	האסימפטוטה
קטנה ממעלת המכנה	$y=0$
שווה למעלת המכנה	מנת המקדמים המובילים

$$\frac{6x^2-18}{x^2-9} \;\to\; y=\frac{6}{1}=6$$

הזזה: הגרף של $g(x)=f(x-7)$ זז 7 יחידות ימינה.
האסימפטוטות האנכיות זזות ב־7, והאופקית לא משתנה.

שאלת בגרות פתורה – רציונלית (א, ב, ג)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 6

נתונה הפונקציה:

$$f(x)=\frac{4x^2}{x^2-9}+a$$

א תחום ההגדרה:

$$x^2-9\neq 0 \;\Rightarrow\; x\neq \pm 3$$

ב הראו שהפונקציה זוגית:

$$f(-x)=\frac{4(-x)^2}{(-x)^2-9}+a=f(x)$$

ג הגרף עובר דרך $(\sqrt{3},0)$. מצאו את a:

$$\frac{4\cdot 3}{3-9}+a=0 \;\Rightarrow\; a=2$$

נציב $a=2$ ונעשה מכנה משותף:

$$f(x)=\frac{6x^2-18}{x^2-9}$$

חיתוך עם ציר ה־x:

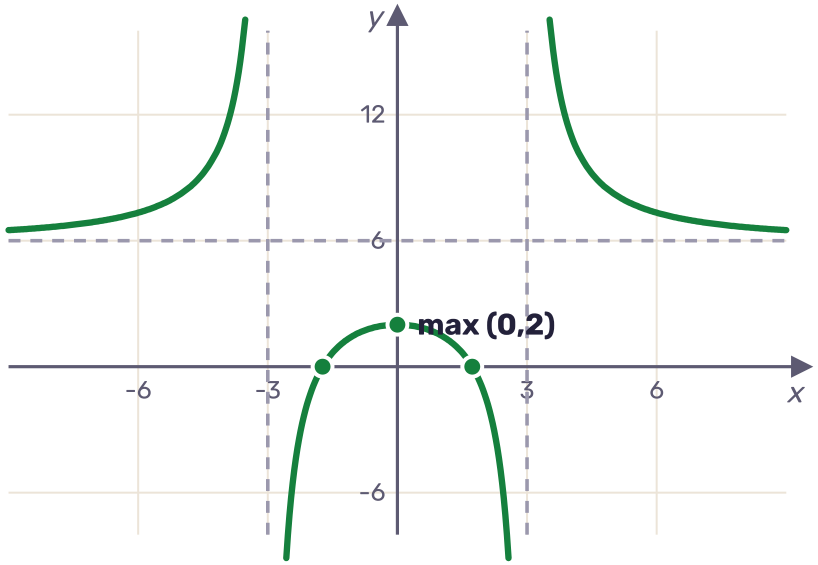
$$6x^2-18=0 \;\Rightarrow\; x=\pm\sqrt{3}$$

חיתוך עם ציר ה־y:

$$f(0)=2$$

שאלת בגרות פתורה – קיצון ואסימפטוטות (ד)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 6



נגזרת של מנה:

$$f'(x)=\frac{8x(x^2-9)-4x^2\cdot 2x}{(x^2-9)^2}=\frac{-72x}{(x^2-9)^2}$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; x=0$$

המכנה תמיד חיובי, ולכן הסימן נקבע לפי המונה:

x	$x<-3$	$-3<x<0$	0	$0<x<3$	$x>3$
f'	+	+	0	−	−
f	↗	↗	max	↘	↘

$\max(0,2)$

האסימפטוטות:

$$x=\pm 3,\quad y=6$$

שאלת בגרות פתורה – שורש (א, ב, ג)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 7

נתונה הפונקציה:

$$f(x) = 2x - 4\sqrt{5x - 16}$$

א

$$5x - 16 \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq 3.2$$

ב

חיתוך עם ציר ה־x: מבודדים את השורש ומעלים בריבוע:

$$x = 2\sqrt{5x - 16} \;\Rightarrow\; x^2 - 20x + 64 = 0$$

$x = 4$ או $x = 16$ – בודקים בהצבה ✓

ג

$$f'(x) = 2 - \frac{10}{\sqrt{5x - 16}} = 0$$

$$\sqrt{5x - 16} = 5 \;\Rightarrow\; x = 8.2$$

$$f(8.2) = -3.6, \quad f(3.2) = 6.4$$

משמאל ל־8.2 הנגזרת שלילית, מימין חיובית.

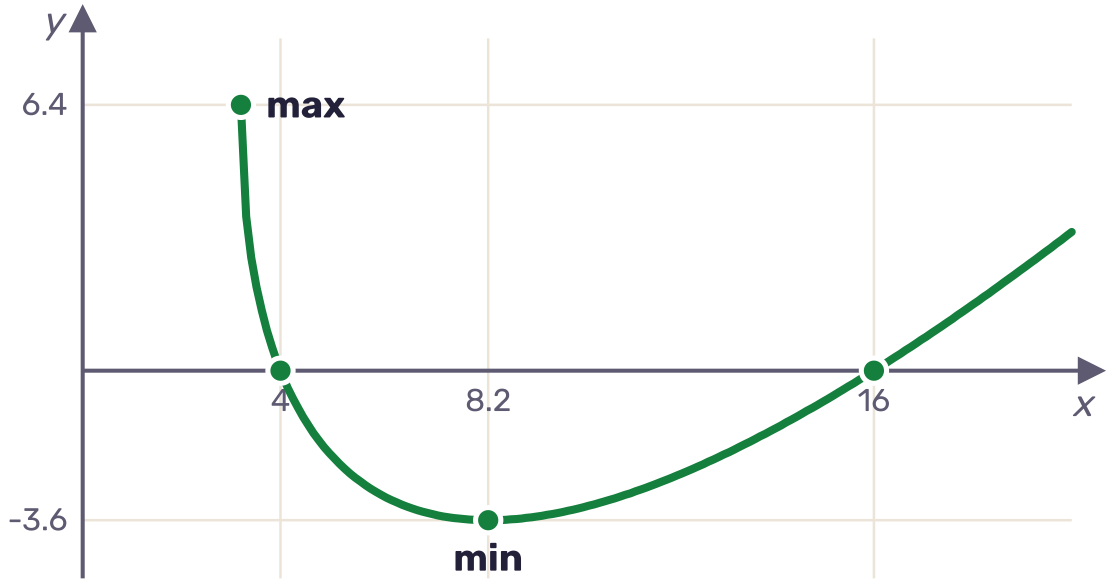
$$\min(8.2,\ -3.6)$$

ומקסימום בקצה התחום:

$$\max(3.2,\ 6.4)$$

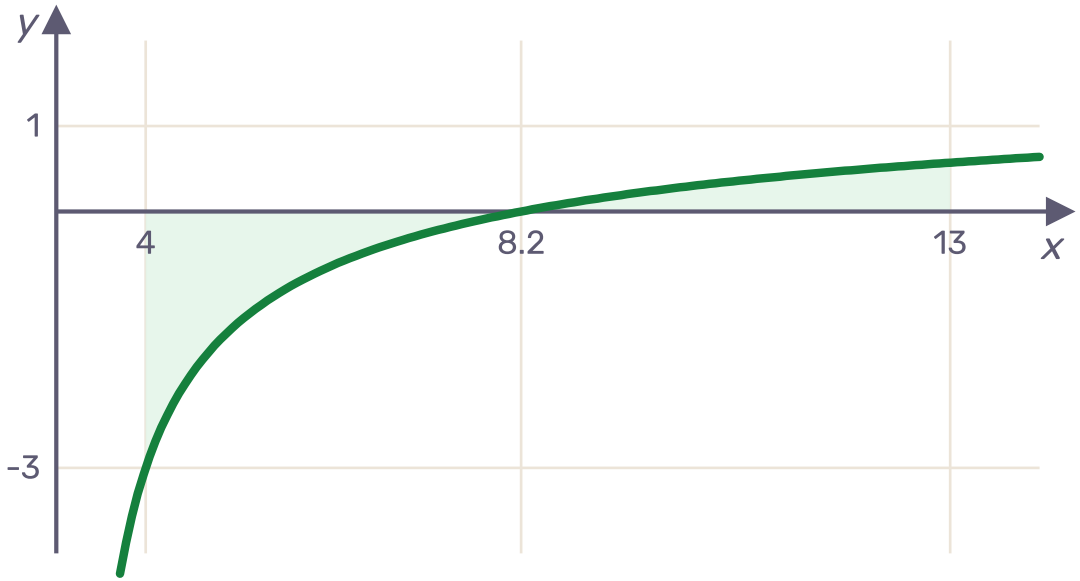
שאלת בגרות פתורה – סקיצה ושטח (ד, ה)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 7



ה. מחשבים את השטח בין גרף **הנגזרת** לציר ה־x, בתחום:

$$4 \le x \le 13$$



$f(x)$ היא פונקציה קדומה של $f'(x)$.

$$f(4)=0,\ f(8.2)=-3.6,\ f(13)=-2$$

$$S_1 = -\big(f(8.2)-f(4)\big) = 3.6$$

$$S_2 = f(13)-f(8.2) = 1.6$$

$$S = 3.6 + 1.6 = 5.2$$

שימו לב – הטעויות הנפוצות

1. בפונקציית שורש – לבדוק **קצה התחום**: גם הוא יכול להיות קיצון.
2. אחרי העלאה בריבוע – **בדיקה בהצבה**.
3. בטבלת הסימנים – לכלול גם את הנקודות שמחוץ לתחום ($x = \pm 3$).
4. אסימפטוטה אופקית – לא לשכוח את המספר שמוסיפים ($+a$).
5. שטח מתחת לציר – עם מינוס; גרף שחוצה את הציר – בחלקים.
6. נקודת קיצון כותבים עם **שני** השיעורים.

בדיקה עצמית

1. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x) = x^3 - 3x$.
2. מצאו את האסימפטוטות של $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$.
3. גזרו: $h(x) = \sqrt{2x+1}$
4. חשבו: $\displaystyle\int_0^2 x^2\,dx$

התשובות (לפתוח אחרי שפתרתם)

1. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$
   $\max(-1, 2),\quad \min(1, -2)$
2. אנכית: $\mathbf{x = 3}$
   אופקית: $\mathbf{y = 2}$
3. $h'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$
4. $\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^2 = \dfrac{8}{3} - 0 = \dfrac{8}{3}$